



Sur une nouvelle cinématique rotationnelle en élastoplasticité anisotrope avec endommagement

Houssem Badreddine, Khémaïs Saanouni, Abdelwahab Dogui

► To cite this version:

Houssem Badreddine, Khémaïs Saanouni, Abdelwahab Dogui. Sur une nouvelle cinématique rotationnelle en élastoplasticité anisotrope avec endommagement. 17e Congrès Français de Mécanique, Aug 2005, Troyes, France. hal-02514868

HAL Id: hal-02514868

<https://utt.hal.science/hal-02514868>

Submitted on 27 Oct 2023

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Sur une nouvelle cinématique rotationnelle en élasto – plasticité anisotrope avec endommagement

Houssem Badreddine⁽¹⁻²⁾, Khémaïs Saanouni ⁽¹⁾, Abdelwaheb Dogui ⁽²⁾

⁽¹⁾ LASMIS/GSM-CNRS-FRE-2719 – Université de Technologie de Troyes
12, rue marie curie BP 2060, 10000 Troyes – France

⁽²⁾ LGM/GM-MA05 – Ecole Nationale d'Ingénieurs de Monastir
Av. Ibn El Jazzar, 5019 Monastir – Tunisie
Adresse électronique : houssem.badreddine@utt.fr

Résumé :

Ce document traite de la formulation en transformations finies d'un modèle phénoménologique de comportement élasto – plastique couplé à l'endommagement. Une anisotropie plastique initiale est prise en compte dans le cadre d'une théorie de plasticité non associée et avec critères non quadratique. Un formalisme en référentiel tournant est utilisé à fin de garantir l'objectivité du modèle. L'hypothèse des milieux à configuration intermédiaire est utilisé pour assurer une décomposition multiplicative de la transformation totale en partie élastique et partie plastique. Un écrouissage mixte non linéaire est mis en jeux. La procédure de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes est utilisée comme support pour la formulation. Le couplage avec un endommagement isotrope est effectué dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu en usant de la notion des variables effectives via la théorie d'équivalence en énergie totale. Une application est faite sur un chargement de glissement simple.

Abstract :

This paper is devoted to the modeling of the anisotropic elasto – plasticity with damage under finite deformation hypothesis. The initial anisotropy of the plastic flow is taken into account using a non quadratic yield criterion in the framework of non normal and non associative plasticity theory. The formalism of rotating frame together with the intermediate configuration are used to ensure both the objectivity requirement as well as the decomposition of the total transformation gradient into elastic and plastic parts. Non linear mixed hardening (kinematic and isotropic) is taken into account « strongly » coupled with the isotropic ductile damage in the framework of state variables based continuum damage mechanics. An application is made to the simple shear loading path.

Mots clefs :

Transformations finies; Elasto-plasticité; Anisotropie initiale; Référentiel tournant; Couplage endommagement comportement; Non normalité; Non quadraticité.

1 Introduction

La prise en compte, en transformations finies élasto – plastique, d'une anisotropie initiale est un problème difficile et controversé. Comme a été discuté dans la littérature par tant d'auteurs ([1], [5]...), les deux difficultés fondamentales qui y sont associées sont : (i) Le choix du formalisme permettant d'assurer l'objectivité de la façon la plus correcte et la plus simple; (ii) Le choix de la transformation élastique et sa composition avec la transformation plastique. Il a été montré qu'un Formalisme en Référentiel Tournant en conjonction avec la théorie des milieux à configurations relâchées constituent un cadre relativement simple pour vérifier ces deux exigences.

L'adoption d'une théorie de plasticité non associée fournit une flexibilité, par rapport à la théorie classique, quant à l'identification des coefficients de Lankford et des courbes d'écrouissage. Ceci permet de contourner le problème des matériaux irréguliers « Anoumalious », signalé par Woodthorpe and Pearce depuis 1970 ([10]). Ces auteurs ont montré l'insuffisance du critère de plasticité de Hill 1948 pour rendre compte de ces matériaux. Ceci a été le point de départ pour la proposition de nouveaux critères de plasticité plus sophistiqués que ceux de Tresca, de von Mises et de Hill 1948. La particularité commune de ces critères est la forme non quadratique de leurs contraintes équivalentes. A cet effet, Logan et Hosford ([11])

ont montré que le coefficient de non quadraticité du critère pourrait être corrélé à la structure cristallographique du matériau.

L'objectif de ce travail est de synthétiser les aspects cités ci-dessus dans un modèle phénoménologique général 3D (Meta modèle) à écrouissage cinématique et isotrope non linéaires « fortement » couplés à l'endommagement, dans le but d'une implémentation dans un code de calcul par éléments finis. La construction de ce modèle est effectuée en suivant la démarche de la thermodynamique des processus irréversibles avec variables internes. Le couplage comportement endommagement est établi dans le cadre de la mécanique de l'endommagement continu, en utilisant la notion de variables effectives basée sur l'hypothèse d'équivalence en énergie totale ([3], [6], [7], [8], [9] ...). Concrètement, le modèle décrit une orthotropie élasto – plastique initiale avec une théorie non associée et non normale. On définira alors deux fonctions (une fonction critère de plasticité et une fonction potentiel plastique) convexes et caractérisées par des contraintes équivalentes orthotropes et non quadratiques de leurs arguments. Un écrouissage mixte non linéaire est pris en compte avec un couplage fort à l'endommagement qui est défini par un couple de variables scalaires et son évolution est régie par une théorie à surface unique ([3], [6], [7], [8], [9] ...).

2 Cinématique élasto – plastique

On se base sur l'hypothèse des milieux à configuration relâchée pour exprimer la cinématique de la transformation élasto – plastique, ce qui se traduit, comme le montre la FIG. 1, par la décomposition multiplicative de la transformation totale définie par le gradient $\underline{F}$ sous la forme:

$$\underline{F} = \underline{F}_e \underline{\bar{F}}_p = \underline{Q} \underline{\bar{V}}_e \underline{\bar{F}}_p = \underline{V}_e \underline{Q} \underline{\bar{F}}_p = \underline{V}_e \underline{Q} \underline{\bar{V}}_p \underline{Q}^T \underline{R}_{ep} = \underline{V}_e \underline{\bar{V}}_p \underline{R}_{ep} = \underline{V}_e \underline{\bar{F}}_p = \underline{Q} \underline{\bar{F}} \quad (1)$$

où $\underline{Q}$ est une rotation qui représente l'orientation du référentiel tournant par rapport à la configuration actuelle. Tout tenseur d'ordre 2 $\underline{T}$ définie dans la configuration actuelle (tel que la contrainte de Cauchy) est transporté dans la configuration dite isocline $\underline{\bar{C}}_p$ par le biais du tenseur $\underline{Q}$ comme suit:

$$\underline{\bar{T}} = \underline{Q}^T \underline{T} \underline{Q} \quad (2)$$

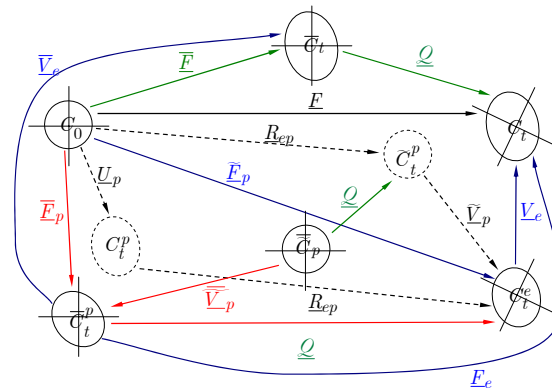


FIG. 1 – Cinématique elastoplastique - décomposition en référentiel tournant.

En considérant la relation (1) et en écrivant le gradient des vitesses de déformation par rapport à la configuration $\underline{\bar{C}}$ on a :

$$[\underline{\bar{V}}_e^{-1} \underline{\bar{L}} \underline{\bar{V}}_e]^S = [\underline{\bar{V}}_e^{-1} \dot{\underline{\bar{V}}_e}]^S + \underline{\bar{D}}_p \quad (3)$$

$$\underline{W}_Q = \dot{\underline{Q}} \underline{Q}^T = \underline{\bar{W}}_p - \underline{Q} \underline{\bar{W}}_p \underline{Q}^T \quad (4)$$

où $\underline{\bar{L}} = \dot{\underline{\bar{F}}} \underline{\bar{F}}^{-1}$, $\underline{\bar{D}}_p = [\dot{\underline{\bar{F}}}_p \underline{\bar{F}}_p^{-1}]^S$, $\underline{\bar{W}}_p = [\dot{\underline{\bar{F}}}_p \underline{\bar{F}}_p^{-1}]^A$ et $\underline{\bar{W}}_p = [\dot{\underline{\bar{F}}}_p \underline{\bar{F}}_p^{-1}]^A$ une certaine mesure de la vitesse de rotation plastique, elle est égale à $\underline{W} = [\dot{\underline{F}} \underline{F}^{-1}]^A$ dans le cas des petites perturbations élastiques.

Il est à signaler qu'en petites déformations élastiques $\underline{\bar{V}}_e = 1 + \underline{\bar{\varepsilon}}_e$ avec $\|\underline{\bar{\varepsilon}}_e\| \ll 1$ la relation (3) devient :

$$\underline{\bar{D}} = \dot{\underline{\bar{\varepsilon}}}_e + \underline{\bar{D}}_p + 2[\underline{\bar{\varepsilon}}_e \underline{\bar{W}}_p]^S \quad (5)$$

La relation (4) représente l'évolution du référentiel tournant avec la donnée de la loi d'évolution de $\underline{\bar{W}}_p$ est dictée par le choix du référentiel tournant (voir plus loin).

3 Cadre thermodynamique de la formulation

3.1 Potentiel d'état et relations d'état

On postule l'existence d'un potentiel d'état fonction positive et convexe des variables d'état. Ces variables permettent de rendre compte des phénomènes à décrire. L'élasticité est représentée par le couple de variable $(\underline{\varepsilon}_e, \underline{\tau})$ où $\underline{\varepsilon}_e$ est une fonction bijective du tenseur de déformations pures élastiques, que nous l'avons choisie de la forme la forme suivante:

$$\underline{\varepsilon}_e = \frac{1}{2}(\underline{\bar{B}}_e - \underline{1}) \quad (6)$$

et $\underline{\tau}$ est la contrainte de Kirchhoff. L'écoulement cinématique est représenté par le couple de variables tensorielles purement déviateurs $(\underline{\bar{a}}, \underline{\bar{X}})$ et l'écrouissage isotrope est représenté par le couple de variables scalaires (r, R) . L'endommagement est représenté par le couple de variables scalaires (d, Y) où $d \in [0, 1]$, $d = 0$ pour un élément de volume sain et $d = 1$ pour un élément de volume totalement endommagé ([3]).

L'énergie libre de Helmholtz notée Ψ est choisie comme potentiel thermodynamique d'état. En supposant que la transformation plastique n'affecte aucunement la transformation élastique, alors ce potentiel peut être décomposé de la façon suivante ([3]):

$$\Psi(\underline{\bar{B}}_e, \underline{\bar{a}}, r, d) = \Psi_e(\underline{\bar{B}}_e, d) + \Psi_p(\underline{\bar{a}}, r, d) \quad (7)$$

L'inégalité de Clausius Duhem s'écrit de la manière suivante dans le cas isotherme :

$$\Phi = \underline{\tau} : \underline{\bar{D}} - \varrho_0 \dot{\Psi} \geq 0 \quad (8)$$

$$\varrho_0 \dot{\Psi} = \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{B}}_e} : \underline{\dot{\bar{B}}}_e + \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \dot{r} + \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{a}}} : \underline{\dot{\bar{a}}} + \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \quad (9)$$

où Φ est la dissipation totale et ϱ_0 est densité rapportée à la configuration initiale.

Dans [1] on montre à partir de (3) que:

$$\underline{\dot{\bar{B}}}_e = 2\underline{\bar{V}}_e \underline{\bar{D}} \underline{\bar{V}}_e - 2[\underline{\bar{B}}_e (\underline{\bar{D}}_p + \underline{\bar{W}}_p)]^s \quad (10)$$

En combinant les relations (8), (9) et (10) on obtient :

$$\Phi = \left(\underline{\tau} - 2\varrho_0 \underline{\bar{V}}_e \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{B}}_e} \underline{\bar{V}}_e \right) : \underline{\bar{D}} + 2\varrho_0 \underline{\bar{B}}_e \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{B}}_e} : \underline{\bar{D}}_p + \underline{\bar{W}}_p - \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \dot{r} - \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{a}}} : \underline{\dot{\bar{a}}} - \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (11)$$

Comme le comportement élastique est par hypothèse réversible et par conséquent non dissipatif, on abouti aux relations d'état comme suit:

$$\text{Loi élastique ou hyper élastique:} \quad \underline{\tau}(\underline{\bar{B}}_e, d) = 2\varrho_0 \underline{\bar{V}}_e \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{B}}_e} \underline{\bar{V}}_e \quad (12)$$

$$\text{Loi d'écrouissage cinématique :} \quad \underline{\bar{X}}(\underline{\bar{a}}, d) = \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{a}}} \quad (13)$$

$$\text{Loi d'écrouissage isotrope :} \quad R(r, d) = \varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (14)$$

$$\text{Loi du dommage :} \quad Y(\underline{\bar{B}}_e, \underline{\bar{a}}, r, d) = -\varrho_0 \frac{\partial \Psi}{\partial d} \quad (15)$$

Ainsi l'inégalité résiduelle qui définit la dissipation intrinsèque ou mécanique s'écrit:

$$\Phi = \underline{\bar{\Sigma}} : (\underline{\bar{D}}_p + \underline{\bar{W}}_p) - Rr - \underline{\bar{X}} : \underline{\dot{\bar{a}}} + Y\dot{d} \geq 0 \quad (16)$$

$$\underline{\bar{\Sigma}} = 2\varrho_0 \underline{\bar{B}}_e \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{B}}_e} = \underline{\bar{V}}_e \underline{\bar{\tau}} \underline{\bar{V}}_e^{-1} \quad (17)$$

où $\underline{\bar{\Sigma}}$ est une force thermodynamique, duale en terme des dissipations, au gradient totale des vitesses des déformations plastique $\underline{\bar{L}}_p$. Le terme $\underline{\bar{\Sigma}} : \underline{\bar{W}}_p$ permet de rendre compte de la dissipation due à la rotation plastique.

Il est à remarquer que si Ψ est isotrope de $\underline{\bar{B}}_e$ (élasticité isotrope) alors $\underline{\bar{B}}_e$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\bar{B}}_e}$ commutent on aura alors:

$$\bar{\underline{\underline{\Sigma}}} = \bar{\underline{\underline{\tau}}} = 2\ell_0 \bar{\underline{\underline{B}}}_e \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\underline{\underline{B}}}_e} \quad (18)$$

En considérant l'hypothèse des petites déformations élastiques et sachant que le comportement plastique est incompressible $\ell_0/\ell = \det \underline{\underline{F}} = \det \underline{\underline{F}}_e \det \underline{\underline{F}}_p \approx 1$ alors on pourrait écrire :

$$\bar{\underline{\underline{\Sigma}}} \approx \bar{\underline{\underline{\tau}}} \approx \bar{\underline{\underline{\sigma}}}(\bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e, d) = \ell \frac{\partial \Psi}{\partial \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e} \quad (19)$$

De plus la décomposition (5) est avérée.

En suivant l'hypothèse ci-dessus les choix des formes explicites des fonctions potentiels que nous avons adoptées sont ceux qui permettent d'avoir des relations linéaires entre les variables internes et leurs variables associées ([3], [6], [7], [8], [9]) :

$$\ell \Psi(\bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e, d) = \frac{1}{2}(1-d) \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e : \bar{\underline{\underline{A}}} : \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e + \frac{1}{3}(1-d) C \bar{\underline{\underline{a}}} : \bar{\underline{\underline{a}}} + \frac{1}{2}(1-d) Q r^2 \quad (20)$$

d'où nous obtenons les relations d'état suivantes:

$$\bar{\underline{\underline{\sigma}}}(\bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e, d) = (1-d) \bar{\underline{\underline{A}}} : \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e \quad (21)$$

$$\bar{\underline{\underline{X}}}(\bar{\underline{\underline{a}}}, d) = \frac{2}{3}(1-d) C \bar{\underline{\underline{a}}} \quad (22)$$

$$R(r, d) = (1-d) Q r \quad (23)$$

$$Y(\bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e, \bar{\underline{\underline{a}}}, r, d) = \frac{1}{2} \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e : \bar{\underline{\underline{A}}} : \bar{\underline{\underline{\varepsilon}}}_e + \frac{1}{3} C \bar{\underline{\underline{a}}} : \bar{\underline{\underline{a}}} + \frac{1}{2} Q r^2 \quad (24)$$

où $\bar{\underline{\underline{A}}}$ est l'opérateur d'élasticité linéaire de l'élément de volume non endommagé, qui dans le cas isotrope s'écrit $\bar{\underline{\underline{A}}} = 2\mu \underline{\underline{I}} + \lambda \underline{\underline{1}} \otimes \underline{\underline{1}}$. C est le module de l'écroutissage cinématique et Q est le module de l'écroutissage isotrope.

3.2 Potentiels des dissipations et relations complémentaires

Pour satisfaire l'inégalité de Clausius – Duhem et retrouver les relations qui lient les variables flux aux variables forces, on postule l'existence, dans la configuration tournée, d'un critère de plasticité qu'on note $\bar{f} \leq 0$ et d'un pseudo potentiel des dissipations qu'on note $\bar{F}$, fonctions convexes et fermées des variables forces:

$$\bar{f} = \frac{1}{\sqrt{1-d}} \bar{\sigma}_e (\bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \bar{\underline{\underline{X}}}) - \frac{R}{\sqrt{1-d}} - \sigma_y \leq 0 \quad (25)$$

$$\bar{F}_p = \frac{1}{\sqrt{1-d}} \bar{\sigma}_p (\bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \bar{\underline{\underline{X}}}) - \frac{R}{\sqrt{1-d}} + \frac{3a}{4(1-d)C} \bar{\underline{\underline{X}}} : \bar{\underline{\underline{X}}} + \frac{b}{2(1-d)Q} R^2 + \frac{S}{s+1} \left\langle \frac{Y - Y_0}{S} \right\rangle^{s+1} \frac{1}{(1-d)^\beta} \quad (26)$$

où σ_y est la limite initiale d'élasticité, les coefficients a et b caractérisent la non linéarité de l'écroutissage mixte et β , S , s et Y_0 ont des paramètres caractéristiques de l'endommagement ductile. Les normes $\bar{\sigma}_e$ et $\bar{\sigma}_p$ sont des contraintes équivalentes, fonctions positives, convexes, homogènes de degré 1, orthotropes et non quadratiques de leurs arguments, que nous les choisissons sous une forme similaire à celle proposé dans [2] dans laquelle nous avons introduit l'écroutissage cinématique:

$$2[\bar{\sigma}_e(\bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \bar{\underline{\underline{X}}})]^m = (1-p) \sum_{i \neq j}^3 |\bar{q}_i - \bar{q}_j|^m + p \frac{3^m}{2^{m-1}+1} \sum_i^3 |\bar{q}_i|^m \quad (27)$$

$$\bar{\underline{\underline{q}}} = \bar{\underline{\underline{H}}} : (\bar{\underline{\underline{\sigma}}} - \bar{\underline{\underline{X}}}) \quad (28)$$

avec $\bar{\underline{\underline{H}}}$ est l'opérateur d'anisotropie du critère de plasticité caractérisé par les constantes matérielles F, G, H, L, M et N . Les $\bar{q}_i$ sont les valeurs propres du tenseur $\bar{\underline{\underline{q}}}$, m est le coefficient de forme ($m \geq 1$ pour garantir la convexité du critère) et p un paramètre d'ajustement $0 \leq p \leq 1$. La contrainte $\bar{\sigma}_p$ est caractérisée par les paramètres $\bar{\underline{\underline{H}}}'$, m' et p' qui sont similaires respectivement à $\bar{\underline{\underline{H}}}$, m et p .

Les relations d'évolution prennent alors la forme suivante (règle de normalité non associée) :

$$\bar{\underline{\underline{D}}}_p = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{\underline{\underline{\sigma}}}} = \dot{\lambda} \bar{\underline{\underline{n}}}_p = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-d}} \bar{\underline{\underline{n}}}_p = \frac{\dot{\lambda}}{\sqrt{1-d}} \bar{\underline{\underline{H}}}' : \bar{\underline{\underline{n}}}'_q \quad (29)$$

$$\dot{\bar{a}} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{X}} = \dot{\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{1-d}} \bar{n}_p - a \bar{a} \right] = -\dot{\lambda} \bar{l}_p \quad (30)$$

$$\dot{r} = -\dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}}{\partial R} = \dot{\lambda} \left[\frac{1}{\sqrt{1-d}} - br \right] = -\dot{\lambda} \bar{l}_p \quad (31)$$

$$\dot{d} = \dot{\lambda} \frac{\partial \bar{F}}{\partial Y} = \dot{\lambda} \frac{1}{(1-d)^\beta} \left\langle \frac{Y-Y_0}{S} \right\rangle^s = \dot{\lambda} \bar{y} \quad (32)$$

où $\bar{n}'_q = \frac{\partial \bar{\sigma}_p(\bar{\sigma} - \bar{X})}{\partial \bar{q}}$ est la normale dans l'espace des contraintes $\bar{q}'$.

Il s'ajoute, par rapport au formalisme hpp, une relation relative à $\bar{\mathcal{W}}_p$, qui permet d'expliciter l'évolution du référentiel tournant définie par la rotation $\underline{\mathcal{Q}}$. Nous supposons que ce taux de rotation est fonction uniquement des variables cinématiques $\bar{\underline{V}}_p$ et $\bar{\underline{D}}_p$, définies plus haut. De plus nous supposons que $\bar{\mathcal{W}}_p$ est linéaire en $\bar{\underline{D}}_p$ de la forme :

$$\bar{\mathcal{W}}_p = \bar{\underline{K}}(\bar{\underline{V}}_p) : \bar{\underline{D}}_p \quad (33)$$

Les référentiels que nous utilisons sont les suivants ([1]):

- Référentiel corotationnel plastique ou de Jaumann plastique (J)

$$\bar{\mathcal{W}}_p = 0 \quad (34)$$

- Référentiel en rotation propre plastique (R)

$$\bar{\mathcal{W}}_{pR} = \frac{2}{\bar{\underline{V}}_{pI} \bar{\underline{V}}_{pII} - \bar{\underline{V}}_{pIII}} [\bar{\underline{V}}_{pI} \bar{\underline{V}}_{pIII} \bar{\underline{D}}_p \bar{\underline{V}}_p^{-1} + \bar{\underline{B}}_p \bar{\underline{D}}_p \bar{\underline{V}}_p] \bar{\underline{A}} = \bar{\underline{K}}_R(\bar{\underline{V}}_p) : \bar{\underline{D}}_p \quad (35)$$

- Référentiel principal des déformations plastiques (V)

$$\bar{\mathcal{W}}_{pV} = 2f_1[\bar{\underline{B}}_p \bar{\underline{D}}_p] \bar{\underline{A}} + 2f_2[\bar{\underline{B}}_p \bar{\underline{D}}_p] \bar{\underline{A}} + 2f_3[\bar{\underline{B}}_p \bar{\underline{D}}_p \bar{\underline{B}}_p] \bar{\underline{A}} = \bar{\underline{K}}_V(\bar{\underline{V}}_p) : \bar{\underline{D}}_p \quad (36)$$

les f_i sont des fonctions des invariants principaux de $\bar{\underline{B}}_p^D = \text{div}(\bar{\underline{V}}_p^2)$ que sont $\bar{\underline{B}}_{pI} = \text{tr}(\bar{\underline{B}}_p)$, $\bar{\underline{B}}_{pII} = -\frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\underline{B}}_p^{D2})$ et $\bar{\underline{B}}_{pIII}^D = \det \bar{\underline{B}}_p^D$.

- Référentiel triaxial plastique (T): Nous appelons référentiel triaxial plastique, celui par rapport auquel la dérivée du tenseur des déformations plastiques logarithmiques $\bar{\underline{v}}_p = \text{Ln}(\bar{\underline{V}}_p)$ est égale à $\bar{\underline{D}}_p$.

$$\bar{\mathcal{W}}_{pT} = \bar{\mathcal{W}}_{pV} - \bar{\underline{\mathcal{Q}}} = [\bar{\underline{K}}_V(\bar{\underline{V}}_p) - \bar{\underline{K}}_Q(\bar{\underline{V}}_p)] : \bar{\underline{D}}_p \quad (37)$$

$$\bar{\underline{\mathcal{Q}}} = \bar{\underline{K}}_Q(\bar{\underline{V}}_p) : \bar{\underline{D}}_p = 2g_1[\bar{\underline{v}}_p^D \bar{\underline{D}}_p] \bar{\underline{A}} + 2g_2[\bar{\underline{v}}_p^{D2} \bar{\underline{D}}_p] \bar{\underline{A}} + 2g_3[\bar{\underline{v}}_p^D \bar{\underline{D}}_p \bar{\underline{v}}_p^{D2}] \bar{\underline{A}} \quad (38)$$

les g_i étant des fonctions des invariant principaux de $\bar{\underline{v}}_p^D = \text{div}(\text{Ln} \bar{\underline{V}}_p)$, $\bar{\underline{v}}_{pII}^D = -\frac{1}{2} \text{tr}(\bar{\underline{v}}_p^{D2})$ et $\bar{\underline{v}}_{pIII}^D = \det \bar{\underline{v}}_p^D$.

4 Résultats numériques

On s'intéresse dans cette section à la réponse locale (en un élément de volume) du modèle à un chargement radial plan qui est le glissement simple, caractérisé par un gradient de transformation isochore de la forme:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} 1 & \gamma & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Le tenseur des contraintes de Cauchy ainsi que le tenseur d'orientation du référentiel tournant, entraînés par une telle transformation dans le plan de symétrie s'écrivent:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix} \text{ et } \underline{\mathcal{Q}} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (40)$$

L'intérêt de ce chargement est l'induction de grandes rotations matérielles ce qui permettra de voir l'influence du choix du référentiel tournant sur les résultats. A ce chargement sont assujettis des matériaux ayant les mêmes propriétés d'élasticité, d'écrouissages (cinématique et isotrope) et d'endommagement. Concrètement, nous allons comparer l'isotropie quadratique de Mises à des exemples d'orthotropie quadratique de Hill en utilisant les deux formulations normale et non normale (en prenant $p = 1$, $m = 2$ et $\frac{3}{2}\bar{H}^2 = \bar{H}_{hill}$). Dans le *Tableau 1* sont exposés les paramètres d'écrouissage et d'endommagement (matériau A1 dans [9]) et dans le *Tableau 2* sont exposés les paramètres d'anisotropie.

Tableau 1. Paramètres d'élasticité, d'écrouissages et d'endommagement (matériau A1 [9]).

Paramètres	σ_y	E	ν	Q	b	C	a	S	s	β	Y_0	D_c
Unité	(MPa)	(MPa)	-	(MPa)	-	(MPa)	-	(MPa)	-	-	(MPa)	-
A1	400	210000	0,3	1000	50	10000	100	0,8	1	1	0	0,99

Tableau 2. Paramètres d'anisotropie.

Paramètres	F'	G'	H'	L'	M'	N'	F	G	H	L	M	N
Isotrope	0,333	0,333	0,333	1,000	1,000	1,000	0,333	0,333	0,333	1,000	1,000	1,000
Normal Aniso	0,220	0,295	0,370	1,000	1,000	0,817	0,220	0,295	0,370	1,000	1,000	0,817
Non Normal Aniso	0,331	0,398	0,264	1,000	1,000	1,732	0,220	0,295	0,370	1,000	1,000	0,817

Dans la *FIG. 2* sont exposés les réponses respectivement en contraintes et angles de rotation des référentiels tournant, en fonction du glissement γ . Ces réponses sont établies avec des calculs couplés et non couplés (où le dommage n'affecte nullement les solutions) et en utilisant les différents référentiels tournants cités plus haut. Ces réponses révèlent l'appréciable sensibilité vis-à-vis du choix du référentiel tournant, d'une part des calculs non couplés par rapport à ceux couplés et d'une autre part pour les modèles anisotropes (formulations normale et non normale) par rapport à celui isotrope. Cette sensibilité qui commence à être influente pour un glissement $\gamma = 1$ pour tous les référentiels sauf pour le référentiel principal des déformations dont les réponses se distinguent dès le départ. En effet, dans le cas isotrope le référentiel tournant n'a pas de sens physique, si ce n'est qu'un moyen mathématique pour effectuer des dérivations objectives. Par contre dans les cas anisotropes les référentiels tournants représentent les axes matériels d'anisotropie dont leur orientation est repérée par la variable angulaire ψ dans ce cas de chargement plan.

Notons qu'en vertu de l'utilisation des référentiels cinématiques et vu que la cinématique est imposée, il n'y a pas de différence notable en terme de ψ entre les trois modèles.

5 Conclusions

Dans ce travail un «meta» modèle élasto – plastique a été formulé en grandes déformations. Ce modèle tient compte des anisotropies élasto – plastiques initiales et prend en charge la représentation des écrouissages cinématique et isotrope non linéaires ainsi qu'un endommagement isotrope. L'anisotropie plastique est représentée dans le cadre d'une théorie de normalité non associée et avec des contraintes équivalentes non quadratiques. Une cinématique élastoplastique en référentiel tournant basée sur l'hypothèse des milieux à configurations relâchées a été adoptée pour assurer l'objectivité d'un tel modèle en grandes déformations avec une panoplie de référentiels tournants. Un algorithme objectif a été proposé pour l'intégration de ce modèle se basant sur une cinématique incrémentale conforme à la cinématique continue. Cet algorithme a été testé via des chargements radiaux plan en l'occurrence le glissement simple sur une gamme de matériaux ne se différenciant que par les propriétés d'anisotropie. Lors de ces tests nous avons pu mettre en relief l'influence des aspects tel que le couplage, l'anisotropie, la non normalité et le choix du référentiel tournant sur les résultats.

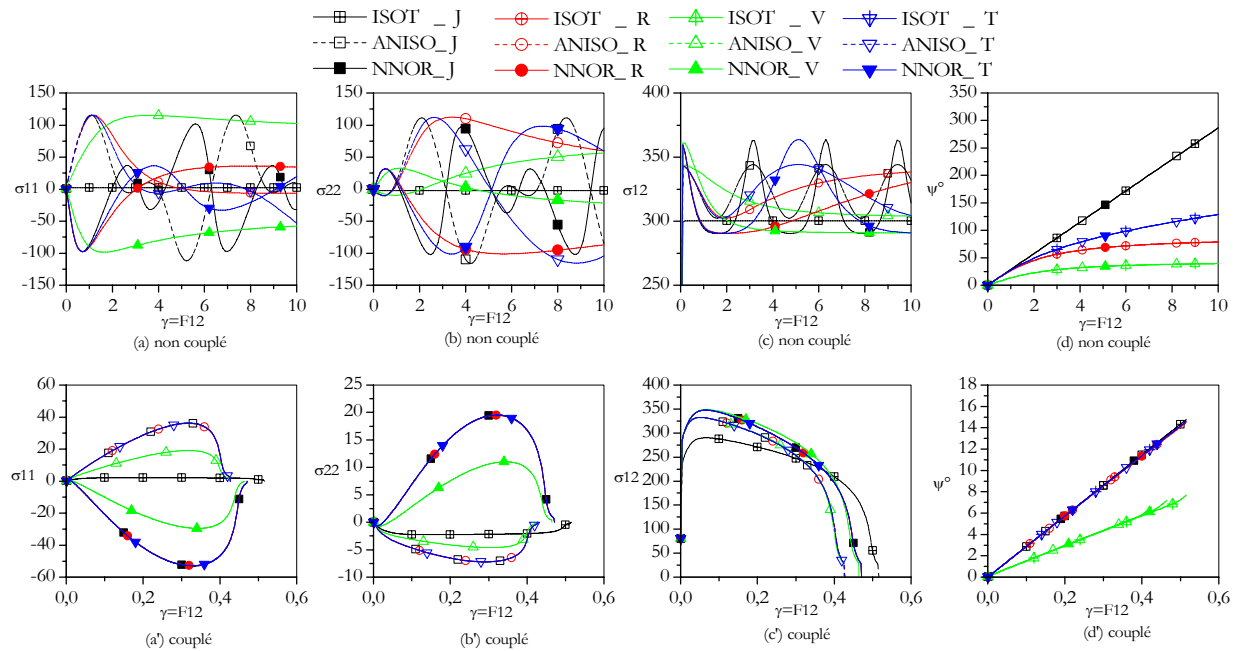


FIG. 2 – Composantes de contraintes et angle de rotation du référentiel tournant en fonction du chargement γ .

References

- [1] A., Dogui, « Plasticité anisotrope en grandes déformations », Thèse de doctorat ès – sciences, 1989, U.C.B, Lyon 1.
- [2] A.-P., Karafillis, M.-C., Boyce, « A general anisotropic yield criterion using bounds and a transformation weighting tensor », J. Mech. Phys. Solids 41, 1993, 1859-1886.
- [3] J., Lemaitre. And J.-L., Chaboche, « Mécanique des milieux solides », Dunod, Paris, French edition, Cambridge Univ. Press, English edition, 1990.
- [4] J.-C., Simo, T.J.R., Hughes, INTERDISCIPLINARY APPLIED MATHEMATICS, MECHANICS AND MATERIALS, volume 7, 1998, “Computational Inelasticity”, Springer – Verlag New York, Inc.
- [5] J., Mandel, «Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques», Int. J. Solids Structures, vol. 9, 1971, pp. 725-740.
- [6] Khelifa, M., Badreddine, H., Gahbiche, M.-A., Saanouni, K., Cherouat, A. and Dogui, A., « Effect of anisotropic plastic flow on ductile damage evolution in sheet metal forming. Application to the circular bulging test », International Journal of Forming processes. Accepted December 2003.
- [7] K. Saanouni, Ch. Forster and F. Ben. Hatira, «On the anelastic Flow with Damage», J. Damage Mechanics, vol. 3, 1994, pp. 140-169.
- [8] Saanouni, K., and Chaboche, J.-L., « Computational damage mechanics. Application to metal forming », chapter 7 of Vol.3, 2003, «Numerical and computational methods», Ed. Milne, R. O. Ritchie and Karimhaloo, ISBN 0-08-0437449-4, Elsevier Oxford, p.321-376.
- [9] Y., Hammi, « Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme », Thèse de Doctorat, 2000, Université de Technologie de Troyes.
- [10] J., Woodthorpe, R., Pearce, « The anomalous behaviour of aluminium sheet under balanced biaxial tension », Int. J. Mech. Sci. 12, 1970, 341-347.
- [11] R., Logan, W.-F., Hosford, « Upper – bound anisotropic yield locus calculations assuming (1111) – pencil glide », Int. J. Mech. Sci. 22, 1980, 419-430.
- [12] S., Chatti, A., Dogui, Ph., Dubujet & F., Sidoroff, « An objective incremental formulation for the solution of anisotropic elastoplastic problems at finite strain », Commun. Numer. Meth. Engng. vol 17, 2001, 845-862.